Corrigé de l'examen blanc d'optique

J.Hormière

I Étude de la loupe

1) De la formule du doublet 1 / 1 / 1 on tire : $f'_1 = e = f'_2 = a$

En reportant dans la première formule de Gullstrand :

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{f'_1} + \frac{1}{f'_2} - \frac{e}{f'_1 f'_2}\ , \qquad \text{on obtient} \qquad \frac{1}{50} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a} - \frac{a}{a.a} = \frac{1}{a}$$

d'où $a = f' = 50\text{ mm} = f'_1 = e = f'_2$

Comme le doublet est symétrique, il suffit de calculer la position du point principal image H'. Le point principal objet H s'obtient ensuite par symétrie par rapport au milieu du doublet.

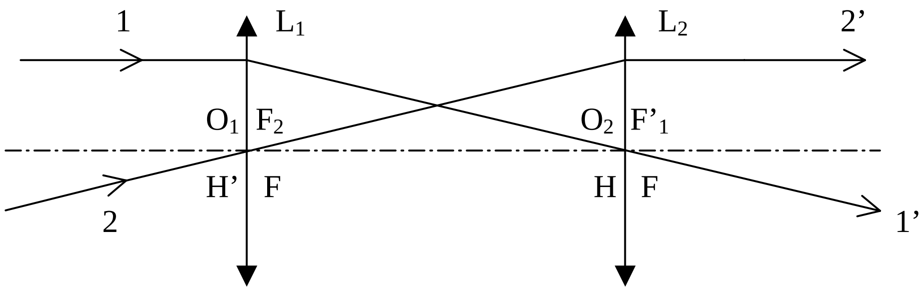
La troisième formule de Gullstrand donne :

$$\overline{L_2H'} = -e\,\frac{f'}{f'_1} = -a\,\frac{a}{a} = -a = \boxed{-50\text{ mm}} \qquad \text{Par symétrie } \overline{L_1H} = \boxed{+50\text{ mm}}$$

$$\overline{L_2F'} = \overline{L_2H'} + \overline{H'F'} = -50 + 50 = \boxed{0\text{ mm}} \qquad \text{Par symétrie } \overline{L_1F} = \boxed{0\text{ mm}}$$

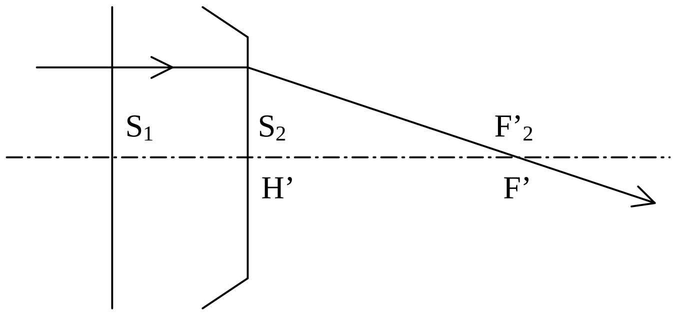
- On constate que F' et H sont confondus avec O_2, centre optique de L_2, et que F et H' sont confondus avec O_1, centre optique de L_1.

La construction graphique des points cardinaux est immédiate car, les points F'_1 et O_2 étant confondus, le rayon 1 parallèle à l'axe optique traverse, après réfraction par L_1, L_2 sans déviation. Par symétrie, l'antécédent du rayon 2' par L_2 traverse L_1 sans déviation.



2) Une lentille plan-convexe a pour vergence la vergence de son dioptre sphérique.

En effet, un rayon incident qui arrive parallèle à l'axe optique sur le dioptre plan n'est pas dévié par celui-ci. Seul le dioptre sphérique le dévie. Le point principal image H' est confondu avec le sommet S_2 du dioptre sphérique, et le foyer principal image F', avec le foyer image F'_2 du dioptre sphérique.



On pourrait également appliquer les formules de Gullstrand et constater que :

$D_1 = 0 \qquad D = D_1 + D_2 - \frac{e}{n} D_1 D_2 = D_2 \qquad \overline{S_2H'} = -\frac{e}{n}\frac{D_1}{D} = 0$

<u>Remarque</u> : Quand la lentille est retournée, sa vergence ne change pas. F coïncide avec F_1 et H, avec S_1.

(Les dioptres sont numérotés dans l'ordre où la lumière les rencontrent.)

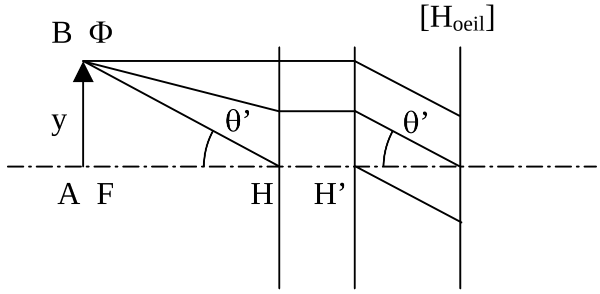
$D = \frac{1}{f'} = D_2 = \frac{1-n}{R_2}$ donc $R_2 = (1-n)\,f' = (1-1{,}525)\,50 = \boxed{-26{,}25 \text{ mm}}$

3) La puissance intrinsèque de la loupe est sa puissance lorsqu'une condition intrinsèque au moins est satisfaite :

- objet dans le plan focal objet ;
- œil (H_{oeil}) dans le plan focal image.

On a alors

$P_i = \left|\frac{\theta'}{y}\right| = \frac{1}{f'} = \frac{1}{50\ 10^{-3}} = \boxed{20\ \delta}$



Le grossissement commercial de la loupe est égal à sa puissance intrinsèque divisée par quatre dioptries, soit

$G_c = P_i / 4 = 20 / 4 = \boxed{5}$

Dans la définition de la puissance, θ' est en radian, y, en mètre et la puissance, en dioptrie.

$$|\theta'| = P_i\,|y| = 20 \times 0{,}86\ 10^{-3} = 1{,}72\ 10^{-2}\ \text{rad} \qquad \text{soit}\quad 1{,}72\ 10^{-2} \times \frac{180}{\pi} = 0{,}985 \cong \boxed{1°}$$

4) La chaîne d'images s'écrit : $A \xrightarrow{L_1} A_1 \xrightarrow{L_2} A' \equiv R$

Or l'objet AB est sur la première lentille mince. Comme les plans principaux de cette lentille sont confondus avec celle-ci, l'image A_1B_1 est confondue avec AB. L'application de la relation de conjugaison de Newton permet de calculer la position de la lentille L_2 :

$$\overline{F_2A}\ .\ \overline{F'_2R} = -f'^2_2$$

$$\overline{AL_2} = \overline{L_1L_2} = \overline{AF_2} + \overline{F_2L_2} = \frac{f'^2_2}{\overline{F'_2R}} + f'_2 = \frac{f'^2_2}{\overline{F'_2L_2} + \overline{L_2H_{oeil}} + \overline{H_{oeil}R}} + f'_2$$

$$\overline{L_1L_2} = \frac{50^2}{-50 + 10 + \overline{H_{oeil}R}} + 50$$

$$\mathcal{R} = +2\,\delta \ \rightarrow\ \overline{H_{oeil}R} = +500\ \text{mm} \qquad \rightarrow\ \overline{L_1L_2} = \frac{50^2}{-50+10+500} + 50 = \boxed{55{,}4\ \text{mm}}$$

$$\mathcal{R} = -2\,\delta \ \rightarrow\ \overline{H_{oeil}R} = -500\ \text{mm} \qquad \rightarrow\ \overline{L_1L_2} = \frac{50^2}{-50+10-500} + 50 = \boxed{45{,}4\ \text{mm}}$$

La lentille L_2 peut donc être déplacée de 10 mm.

Les tailles des images successives de l'objet sont notées y_1 et y'.
Comme il a été vu plus haut, l'objet et la première image sont confondus. Il s'ensuit $y_1 = y$.
La puissance de la loupe s'écrit alors :

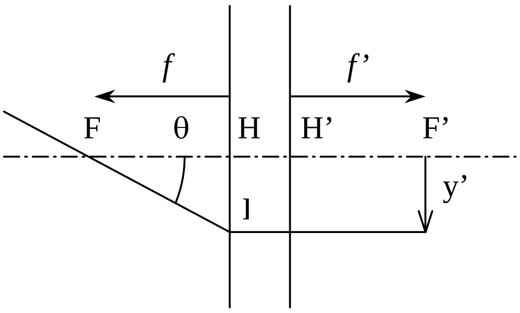
$$P = \left|\frac{\theta'}{y}\right| = \left|\frac{\theta'}{y_1}\right| = \left|\frac{\theta'}{y'}\right|\left|\frac{y'}{y_1}\right| = |\mathcal{R}|\left|\frac{f'_2}{\overline{F_2A_1}}\right|$$

$$\mathcal{R} = +2\,\delta \ \rightarrow\ \overline{F_2A_1} = \overline{F_2L_1} = \overline{F_2L_2} + \overline{L_2L_1} = 50 - 55{,}4 = -5{,}4\ \text{mm} \quad P = 2\,\frac{50}{5{,}4} = \boxed{18{,}5\ \delta}$$

$$\mathcal{R} = -2\,\delta \ \rightarrow\ \overline{F_2A_1} = \overline{F_2L_1} = \overline{F_2L_2} + \overline{L_2L_1} = 50 - 45{,}4 = +4{,}6\ \text{mm} \quad P = 2\,\frac{50}{4{,}6} = \boxed{21{,}7\ \delta}$$

II Étude de l'objectif

1) L'objectif est placé dans l'air. Comme les milieux extrêmes sont identiques, les distances focales objet et image sont opposées : $f = -f'$

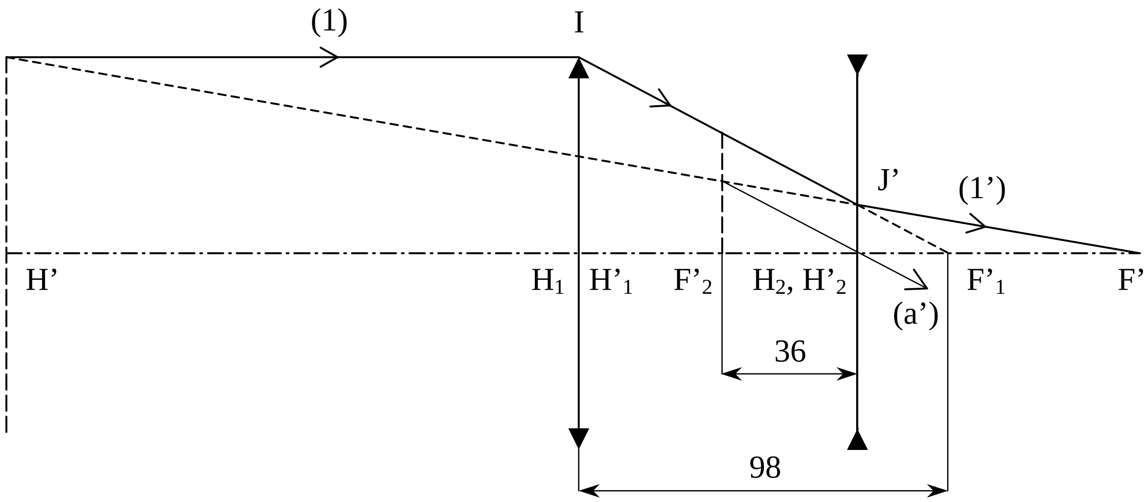


Supposons connus les points cardinaux de l'objectif et considérons positifs le diamètre apparent θ et la taille de l'image y'.

Dans le triangle FHI, $\tan\theta = \dfrac{HI}{FH} = \dfrac{y'}{f'}$. Donc,

$$f' = \frac{y'}{\tan\theta} = \frac{3{,}49}{\tan\left(\frac{40}{60}\right)} = 299{,}93 \cong \boxed{+\ 300\ \text{mm}}$$

2)



Un rayon incident parallèle à l'axe optique(1) et le rayon émergent correspondant (1') se coupent sur le plan principal image. La droite IJ', qui joint les intersections respectives de ces rayons avec le plan de la première lentille et le plan de la seconde, coupe l'axe optique en F'_1.
Un rayon (a') parallèle au rayon intermédiaire, et passant par O_2*, coupe le rayon émergent (1') en un foyer secondaire image de la seconde lentille. D'où la construction de* F'_2.

3) La troisième formule de Gullstrand donne la distance focale image de la première lentille :

$$\overline{L_2H'} = -\,e\,\frac{f'}{f'_1} \quad \rightarrow \quad f'_1 = -\,e\,\frac{f'}{\overline{L_2H'}} = -\,75\,\frac{300}{-\,225} = \boxed{+\,100\text{ mm}}$$

La première formule permet de calculer la distance focale image de la seconde lentille :

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{f'_1} + \frac{1}{f'_2} - \frac{e}{f'_1 f'_2} \quad \rightarrow \quad f'_2 = \frac{1-\dfrac{e}{f'_1}}{\dfrac{1}{f'}-\dfrac{1}{f'_1}} = \frac{1-\dfrac{75}{100}}{\dfrac{1}{300}-\dfrac{1}{100}} = \boxed{-\,37{,}5\text{ mm}}$$

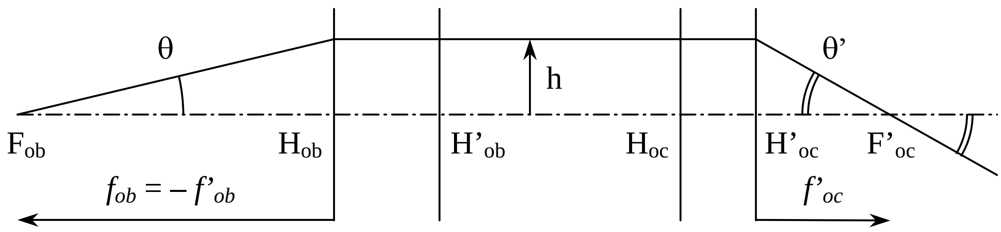
En posant a = 12, 5 mm, on a bien

f'_1 = 100 mm = 8a ; e = 75 mm = 6a ; f'_2 = – 37,5 mm = – 3a $\rightarrow$ $\boxed{\text{formule } 8\ /\ 6\ /\ -\,3}$

4) Le grossissement de la lunette afocale est égal au rapport de la focale de l'objectif à la focale de l'oculaire (la loupe ici).

$$G = \frac{f'_{ob}}{f'_{oc}} = \frac{300}{50} = \boxed{6}$$

<u>Démonstration de la formule sur un schéma de principe</u>



Les angles sont considérés positifs.

$$G = \frac{\theta'}{\theta} = \frac{\tan\theta'}{\tan\theta} = \frac{\dfrac{h}{f'_{oc}}}{\dfrac{h}{f'_{ob}}} = \frac{f'_{ob}}{f'_{oc}}$$

III <u>Interféromètre et photographie des anneaux</u>

1) $\delta = 2e\cos i + \dfrac{\lambda}{2}$

(e : épaisseur de la lame d'air ; i : angle d'incidence sur la lame de verre ; λ : longueur d'onde)

2) Voir cours

3) Les franges observées par réflexion sont beaucoup plus contrastées que les franges observées par transmission. En effet, les amplitudes des deux vibrations réfléchies qui interfèrent par réflexion sont : $a_1 = a\,\tau^2\,\rho$ & $a_2 = a\,\tau^4\,\rho$, ce qui donne un rapport $k = \frac{a_2}{a_1} = \tau^2 = T$

et un contraste $\Gamma = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} = \frac{2a_1a_2}{a_1^2 + a_2^2} = \frac{2k}{1 + k^2} = \frac{2T}{1 + T^2}$.

Si les lames sont en verre d'indice 1,5, R = 0,04 et T = 0,96, d'où $\Gamma = 0{,}9992 \cong 1$ soit 100%

Dans le cas des interférences par transmission, on aurait obtenu :

$a_1 = a\,\tau^4$; $a_2 = a\,\tau^4\,\rho^2$; $k = \rho^2 = R$; $\Gamma = \frac{2R}{1 + R^2} = 0{,}0799 \cong 0{,}08$ soit 8%

4) Au centre du champ d'interférence interfèrent les rayons qui ont traversé la lame d'air sous incidence normale.

$i = 0° \rightarrow \cos i = 1$ et $\delta = 2e + \frac{\lambda}{2} = p_0\lambda \rightarrow p_0 = \frac{2e}{\lambda} + 0{,}5 = \frac{2}{546\ 10^{-6}} = 3663{,}5037 \cong \boxed{3663{,}5}$

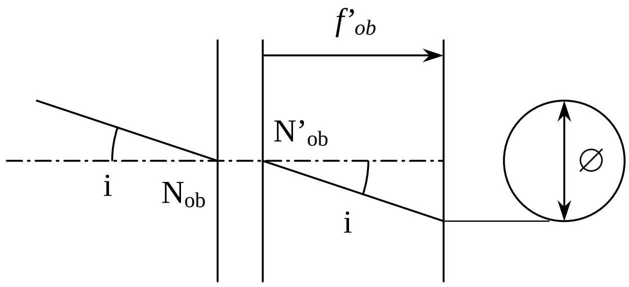
Quand l'angle d'incidence augmente, son cosinus diminue, ainsi que l'ordre d'interférence p. L'ordre du premier anneau brillant est donc donné par la première valeur entière inférieure à p_0, soit $\boxed{3663}$.

On en déduit : $2i = 2\ \mathrm{Arccos}\left[\frac{(p - 0{,}5)\lambda}{2e}\right] = 2\ \mathrm{Arccos}\left[\frac{(p - 0{,}5)}{(p_0 - 0{,}5)}\right] = 2\ \mathrm{Arccos}\left[\frac{(3662{,}5)}{(3662{,}0037)}\right]$

$2i = \boxed{1{,}90°}$

5) Le diamètre de l'anneau dans le plan du film est

$\varnothing = 2f'_{ob}\tan i = 600 \tan 0{,}95 = \boxed{9{,}95\text{ mm}}$ ce qui est très proche de 10 mm.



6) L'angle d'incidence le plus élevé sur la lame d'air (i_{max}) est donné par un rayon issu du bord de la source S.

$\tan i_{max} = \dfrac{Ø_0}{2f'_0} = \dfrac{20}{140} = \dfrac{1}{7}$ ce qui donne $i_{max} = 8{,}13°$

L'ordre d'interférence correspondant est $p_{min} = \dfrac{2e \cos i_{max}}{\lambda} + 0{,}5 = 3626{,}69$

Le dernier anneau brillant a pour ordre le premier nombre entier supérieur à p_{min}, soit $\boxed{3627}$

Les calculs analogues à ceux du 4) et 5) donnent :

$2i = 16{,}19°$ $\varnothing = 85{,}35$ mm

La diagonale du format photographié est : $60\sqrt{2} = 84{,}85$ mm. L'anneau est hors-champ, il ne sera pas sur la photographie.

7) Le plus grand anneau photographiable en entier a un diamètre de 60 mm.

L'angle i correspondant est : $i = \text{Arctan}\left[\dfrac{60}{2f'_{ob}}\right] = \text{Arctan}\left[\dfrac{60}{600}\right] = 5{,}71°$.

L'ordre d'interférence associé est : $p = \dfrac{2e \cos 5{,}71}{\lambda} + 0{,}5 = 3645{,}32$

L'ordre de l'anneau brillant le plus grand, enregistré en entier, est 3646.

Le nombre total d'anneaux brillants photographiés en entier est $(3663 - 3646 + 1) = \boxed{18}$