Corrigé de l'épreuve d'Optique / BTSOL 2005

J.Hormière (27 mai 2005)

Optique géométrique

Étude d'une lunette de visée (*Remarque 1*)

I.1

Un objectif constitué de deux lentilles minces accolées est achromatique, lorsque les vergences des deux lentilles (D_1 et D_2) et leurs nombre d'Abbe (*Remarque 2*) respectifs (ν_1 et ν_2) satisfont la condition :

$$\frac{D_1}{\nu_1} + \frac{D_2}{\nu_2} = 0 \qquad (1)$$

L'épaisseur du doublet objectif étant négligeable, sa vergence est égale la somme des vergences des lentilles qui le composent.

$$D_{obj} = D_1 + D_2 = \ + 4,2\ \delta \qquad (2)$$

Les équations (1) et (2) donnent un système linéaire de deux équations à deux inconnues D_1 et D_2. On résout ce système par la méthode de substitution, en partant de l'équation la plus simple (2), d'où l'on extrait D_2 en fonction de D_1, pour reporter ensuite cette expression dans l'équation (1) :

$$D_2 = -\frac{\nu_2}{\nu_1}\ D_1 = -\frac{60,3}{38,2}\ D_1$$

$$D_1 - \frac{60,3}{38,2}\ D_1 = (1 - \frac{60,3}{38,2})\ D_1 = \frac{38,2 - 60,3}{38,2}\ D_1 = \frac{-22,1}{38,2}\ D_1 = 4,2$$

$$D_1 = \frac{38,2 \times 4,2}{-22,1} = -\ \mathbf{7{,}26}\ \delta$$

$$D_2 = 4,2 - D_1 = 4,2 - (-7,26) = \mathbf{+\ 11{,}46}\ \delta$$

I.2

Soit R_{11}, R_{12}, R_{21} et R_{22} les quatre rayons de courbure successifs des dioptres de l'objectif.

C'est la seconde lentille qui est convergente (vergence positive) et équiconvexe. Pour des raisons de symétrie, ses rayons de courbure sont opposés et les vergences des deux dioptres sont égales. Il s'ensuit :

$$D_2 = D_{21} + D_{22} = 2D_{21} = \frac{2(n_2 - 1)}{R_{21}} \quad \longrightarrow \quad R_{21} = \frac{2(n_2 - 1)}{D_2} = \frac{2(1,516 - 1)}{11,46}\ \text{m}$$

soit $R_{21} = R_{22} = +\ 90{,}05 \simeq \mathbf{+\ 90\ mm}$

La première lentille est divergente. De plus $R_{12} = R_{21}$

$$D_1 = D_{11} + D_{12} = \frac{n_1 - 1}{R_{11}} + \frac{1 - n_1}{R_{12}} \quad \longrightarrow \quad R_{11} = \frac{n_1 - 1}{D_1 - \dfrac{1 - n_1}{R_{12}}} = \frac{1,653 - 1}{-7,26 - \dfrac{1 - 1,653}{0,09005}} \text{ m}$$

soit $R_{11} = -\ 77067{,}69$ mm

Ce dioptre sera assimilé à un dioptre plan. La lentille $\mathbf{L_1}$ est donc plan-concave.

II.1

L'indication × 15 (quinze fois) représente le **grossissement commercial** de l'oculaire.

Ce grossissement est égal à la puissance intrinsèque divisée par quatre dioptries, ce qui donne :

$P_{ioc} = 4\ G_{Coc} = 4 \times 15 = \mathbf{60}\ \delta$

$f'_{oc} = \dfrac{1}{P_{ioc}} = \dfrac{1}{60}$ m, soit $\mathbf{+\ 16{,}\overline{6}\ mm}$

II.2

Les formules de Gullstrand permettent le calcul du paramètre a du doublet et des positions de points principaux :

$$\frac{1}{f'_{oc}} = \frac{1}{f'_3} + \frac{1}{f'_4} - \frac{e}{f'_3 f'_4} = \frac{1}{3a} + \frac{1}{3a} - \frac{2a}{3a.3a} = \frac{3 + 3 - 2}{9a} = \frac{4}{9a}$$
$$\frac{1}{f'_{oc}} = \frac{1}{16,\overline{6}} = \frac{4}{9a} \quad \longrightarrow \quad a = \frac{4 \times 16,\overline{6}}{9} = 7,\overline{407}\ mm$$

En conséquence $f'_3 = f'_4 = 3 \times 7,\overline{407} = 22,\overline{2}\ mm$ & $e = 2 \times 7,\overline{407} = 14,\overline{814}\ mm \simeq 14,8\ mm$

Comme l'oculaire est symétrique, il suffit de calculer les positions des points cardinaux objets ; celles des points cardinaux images s'obtenant par un simple changement de signe.

$$\overline{L_3H_{oc}} = e\frac{f'_{oc}}{f'_4} = 2a\ \frac{\frac{9a}{4}}{3a} = \frac{18a}{12} = 1,5\ a = 1,5 \times 7,\overline{407} = \ \mathbf{+\ 11,\overline{1}\ mm}$$

$$\overline{L_3F_{oc}} = \overline{L_3H_{oc}} + \overline{H_{oc}F_{oc}} = \overline{L_3H_{oc}} - f'_{oc} = 11,\overline{1} - 16,\overline{6} = \ \mathbf{-\ 5,\overline{5}\ mm}$$

$$\overline{L_4H'_{oc}} = -\overline{L_3H_{oc}} = \ \mathbf{-\ 11,\overline{1}\ mm}$$

$$\overline{L_4F'_{oc}} = -\overline{L_3F_{oc}} = \ \mathbf{+\ 5,\overline{5}\ mm}$$

L'oculaire est **positif**, car son foyer principal objet F_{oc}, situé en avant du verre de champ L_3, est réel.

La condition d'achromatisme apparent : l'épaisseur du doublet est la moyenne arithmétique des focales des deux lentilles qui le composent – lentilles supposées de même nombre d'Abbe – **n'est pas satisfaite**.

En effet $e = 2a \neq 0,5(f'_3 + f'_4) = 3a$

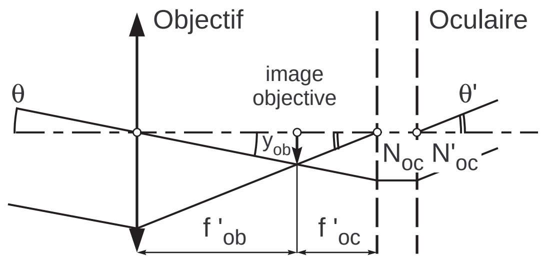
III.1

Le grossissement de la lunette est le quotient du diamètre apparent θ' de l'image, observée à travers l'instrument, et du diamètre apparent θ de l'objet, observé à l'œil nu.

$$\mathbf{G} = \frac{\theta'}{\theta}$$

La lunette est afocale ; le foyer principal image de l'objectif coïncide avec le foyer principal objet de l'oculaire.

Considérons les deux triangles rectangles qui ont comme côté commun l'image objective et dont les sommets respectifs sont : le centre optique de l'objectif et le point nodal objet de l'oculaire – confondu avec le point principal objet, car les milieux extrêmes de l'oculaire sont identiques.



Prenons longueurs et angles en valeur absolue.

Si y_{ob} est la grandeur de l'image objective, alors

$$tan\theta = \frac{y_{ob}}{f'_{ob}} \quad \& \quad tan\theta' = \frac{y_{ob}}{f'_{oc}}$$

Les angles étant supposés petits, on peut confondre les tangentes avec les angles exprimés en radian. Il s'ensuit

$$G = \frac{\theta'}{\theta} = \frac{\frac{y_{ob}}{f'_{oc}}}{\frac{y_{ob}}{f'_{ob}}} = \frac{f'_{ob}}{f'_{oc}} = \frac{D_{oc}}{D_{ob}} = \frac{60}{4,2} = 14,29 \simeq \mathbf{14{,}3}$$

Un calcul algébrique, où l'on aurait pris en compte des longueurs et des angles orientés, avec les conventions de signe usuelles, aurait donné un grossissement algébrique négatif, traduisant le fait que l'image observée est renversée (on voit *à l'envers* à travers une lunette de Kepler).

III.2

Le cercle oculaire est la pupille de sortie d'un instrument visuel, c'est-à dire, le conjugué image, à travers tous les composants optiques qui lui succèdent, du diaphragme d'ouverture.

Ici, c'est l'objectif qui est diaphragme d'ouverture.

Appliquons les formules de Newton pour trouver son conjugué à travers l'oculaire.

$$\overline{F_{oc}Ob}.\overline{F'_{oc}CO} = -f'^{\,2}_{oc} \quad \longrightarrow \quad \overline{F'_{oc}CO} = \frac{-f'^{\,2}_{oc}}{\overline{F_{oc}Ob}} = \frac{-16,\overline{6}^2}{-238,1} \ + \ 1,17\ mm$$

$$\overline{L_4CO} = \overline{L_4F'_{oc}} + \overline{F'_{oc}CO} = 5,\overline{5} + 1,17 = 6,73 \simeq \mathbf{+\ 6{,}7\ \ mm}$$

$$g_{yoc} = \frac{f'_{oc}}{\overline{F_{oc}Ob}} = \frac{16,\overline{6}}{-238,1} = -\ 0,07 \quad \longrightarrow \quad \varnothing CO = |g_{yoc}|\varnothing Do = 0,07 \times 30 = \ \mathbf{2{,}1\ \ \ mm}$$

III.3

Pour déterminer le champ objet de pleine lumière, cherchons d'abord la lucarne d'entrée L$_e$.

C'est le conjugué objet du diaphragme de champ, c-.à.d. L_3, à travers l'objectif L.

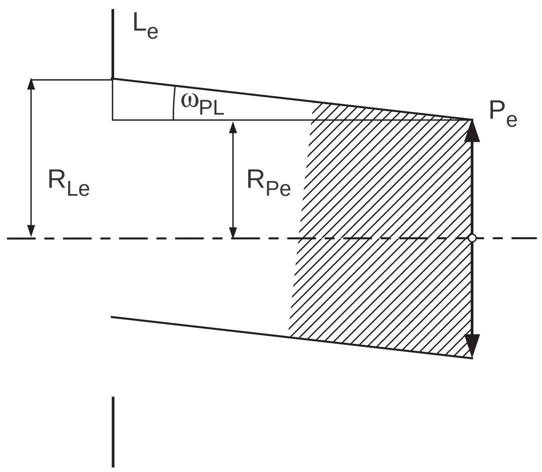
$$\overline{LL_3} = \overline{LF'_{ob}} + \overline{F'_{ob}F_{oc}} + \overline{F_{oc}L_3} = 238,1 + 5,\overline{5} = 243,6\overline{5}\ mm$$

$$\frac{1}{\overline{LL_3}} - \frac{1}{\overline{LL_e}} = \frac{1}{f'_{ob}} \quad \longrightarrow \quad \overline{LL_e} = \frac{1}{\dfrac{1}{\overline{LL_3}} - \dfrac{1}{f'_{ob}}} = \frac{1}{\dfrac{1}{243,6\overline{5}} - \dfrac{1}{238,1}} \simeq\ -10\,444\ mm$$

$$\varnothing L_e = \varnothing L_3\ \frac{LL_e}{LL_3} = 8\ \frac{10\,444}{243,6\overline{5}} = 342,91 \simeq\ 343\ mm$$

La pupille d'entrée P_e est l'objectif lui-même.

Le faisceau utile objet à la limite du champ de pleine lumière est un faisceau parallèle qui s'appuie sur la pupille d'entrée et tangente le bord intérieur de la lucarne d'entrée.



On tire aisément de la figure ci-dessus

$$\tan\omega_{PL} = \frac{R_{Le} - R_{Pe}}{L_eP_e} = \frac{343 - 30}{2 \times 10\,444} = 0,015 \quad \longrightarrow \quad \omega_{PL} = 0,86^{\circ} \quad \longrightarrow \quad 2\omega_{PL} = \mathbf{1,72^{\circ}}$$

$$\omega'_{PL} = G.\omega_{PL} = 14,3 \times 0,86 = 12,30^{\circ} \quad \longrightarrow \quad 2\omega'_{PL} = \mathbf{24,6^{\circ}}$$

(Un calcul avec les tangentes aurait donné pour le champ image 24,2 $^{\circ}$)

Pour éliminer le champ de contour, il faut placer un diaphragme dans le plan d'une image réelle et lui donner le diamètre du champ de pleine lumière en cet endroit-là.

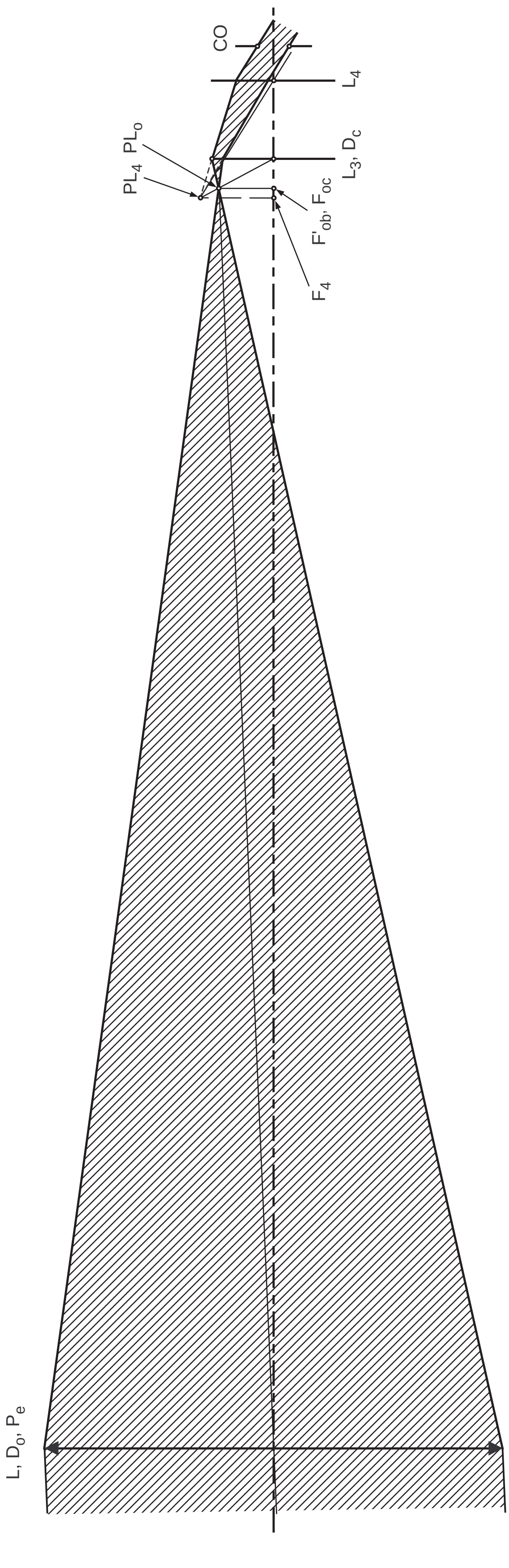
Le plan focal objet de l'oculaire est réel (oculaire positif). C'est là que l'on va placer le diaphragme.

Son diamètre est : $2f'_{ob}.\tan\omega_{PL} = 2 \times 238,1 \times 0,015 = 7,14 \simeq$ **7,1 mm**

III.4

Pour des raisons de mise en page, l'échelle du schéma demandé a été réduite (0,8 × 2,4).

Le faisceau utile à la limite du champ de pleine lumière est construit en joignant, dans l'espace de l'image objective, le bord inférieur de L et le bord supérieur de L_3.


CO
L_4
L_3, D_c
PL_4 PL_o
F'_{ob}, F_{oc}
F_4
L, D_0, P_e

Ce rayon coupe le plan focal image de l'objectif (confondu avec le plan focal objet de l'oculaire) en un point PL_o.

Ce point relié au bord supérieur de L délimite le faisceau intermédiaire.

L'image PL_4 de PL_o à travers le verre de champ est alignée avec le centre optique du verre de champ et appartient au plan focal objet du verre d'œil.

La droite qui relie PL_4 au centre optique du verre d'œil donne la direction du faisceau utile émergeant de l'oculaire.

Ce faisceau s'appuie sur le cercle oculaire CO.

La droite qui relie PL_o au centre optique de l'objectif donne la direction du faisceau parallèlle entrant dans l'objectif.

III.5

La limite de séparation due à la diffraction du diaphragme d'ouverture est :

$$LS(diff) = \frac{1,22\lambda}{\text{Ø}D_o} = \frac{1,22 \times 550\ 10^{-6}}{30} = 2,24\ 10^{-5}\ rad$$

La limite de séparation due à l'œil, rapportée dans l'espace objet de la lunette est :

$$LS(\text{œ}il) = \frac{1,5}{14,3}\ \text{minute d'angle, soit}\ \frac{1,5}{14,3}\ \frac{\pi}{180 \times 60} = 3,05\ 10^{-5}\ rad$$

C'est la plus grande des deux valeurs qui limite les performances du système (lunette + œil), à savoir $LS(\text{œ}il) = 3,05\ 10^{-5}\ rad$.

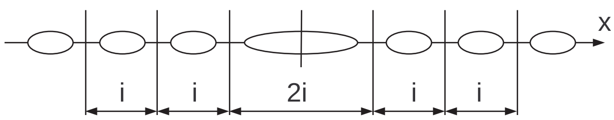
À une distance de 1000 m, l'œil pourra voir séparément deux points distants de :

$3{,}05\ 10^{-5} \times 10^{6}$ = **30 mm environ**.

Optique physique

I.1

Le phénomène s'appelle diffraction.



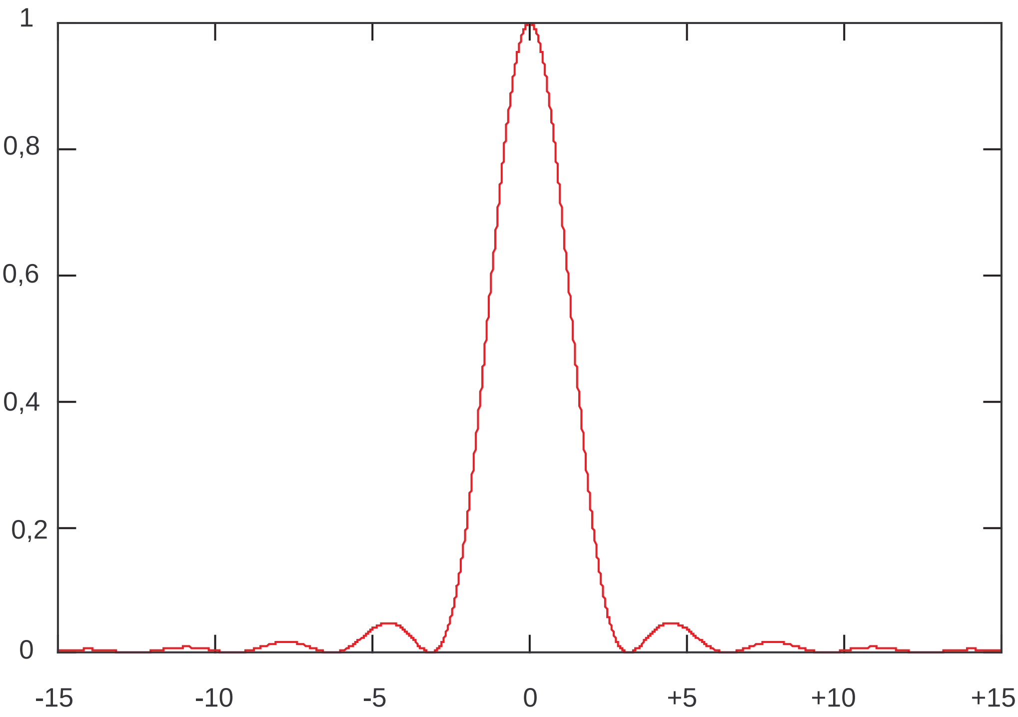
On observe sur l'écran une tache centrale rouge oblongue très intense, centrée au foyer principal image de la lentille, entourée symétriquement de taches rouges d'intensité décroissante au fur et à mesure que l'on s'éloigne de la tache centrale. Ces taches sont alignées dans la direction x, orthogonale à la direction de la fente.

L'intensité s'annule entre les taches brillantes consécutives. La distance entre deux minimums successifs est constante (interfrange i), à l'exception de la tache centrale pour laquelle elle est doublée (largeur 2i).

I.2

$$i = \frac{\lambda f'}{e} = \frac{633\ 10^{-6} \times 1000}{15\ 10^{-3}} = \mathbf{42{,}2\ mm}$$

I.3

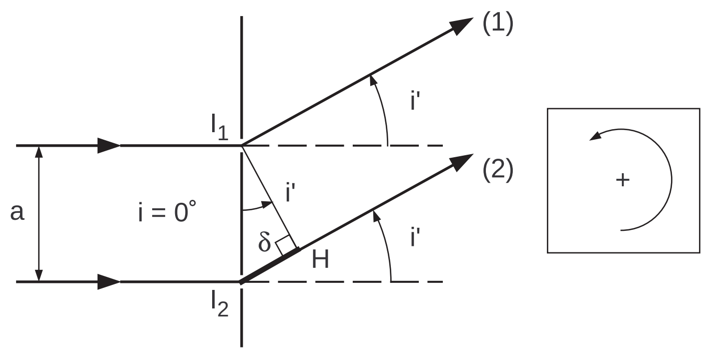


En abscisse, angle u en radian ; en ordonnée, intensité relative I/Imax

La variation d'intensité est de type $sinc^2(u)$ avec,

$$sinc(u) = \text{sinus cardinal} = \frac{sin(u)}{u} \text{ et } u = \frac{\pi\ e\ x}{\lambda\ f'}$$

II.1



Soit H, le pied de la perpendiculaire menée de I_1 sur le rayon (2), diffracté dans la direction i'. *Angle orienté à partir de la normale au réseau et convention trigonométrique.*

La différence de marche δ, ou différence de chemin optique, entre les vibrations (2) et (1) qui interfèrent à l'infini dans la direction i' est :

$\delta = I_2H = I_1I_2.\sin(I_1I_2, I_1H) = \mathbf{a.sin\ i'}$

II.2

Les ordres de diffraction sont associées aux valeurs de k (entier relatif), telles que :

$\delta = a.\sin i' = k.\lambda$

Comme l'angle i' varie entre $-\pi$ et $+\pi$ radian, le sinus correspondant varie entre – 1 et + 1.

Les valeurs extrêmes de k sont bornées par :

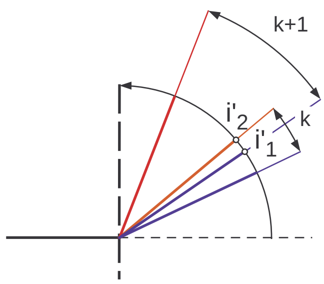
$$p_{min} = -\frac{a}{\lambda} = -\frac{5}{0,633} = -7,9 \quad \& \quad p_{max} = +\frac{a}{\lambda} = +\frac{5}{0,633} = +7,9$$

Il y a donc **15 ordres observables** sur l'écran (k = – 7 ; – 6 ; ... ; – 1 ; 0 ; + 1 ; ... ; + 6 ; + 7)

II.3.a

Considérons les ordres positifs.

Il y a recouvrement des ordres k et k + 1 lorsque $i'_1(k+1) < i'_2(k)$.



Comme $a.\sin i'_1 = (k+1)\lambda_1 \quad \& \quad a.\sin i'_2 = k\lambda_2$

l'inégalié devient, après simplification :

$$(k+1)\lambda_1 < k\lambda_2 \quad \longrightarrow \quad \frac{k+1}{k} < \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \quad \longrightarrow \quad 1 + \frac{1}{k} < \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{k} < \frac{\lambda_2}{\lambda_1} - 1 = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1}$$

Les deux termes de l'inégalité sont positifs ; en les inversant, l'inégalité change de sens, soit

$$k > \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{400}{750 - 400} = 1,14$$

En conclusion, **il n'existe que deux spectres isolés, associés aux ordres : k = + 1 et k = – 1** (par symétrie).

L'ordre 0 n'est pas pris en compte, car il n'y a pas de spectre pour cette valeur de k ; les radiations de différentes longueurs d'onde sont diffractées dans la même direction et, superposées, redonnent le *blanc* initial.

II.3.b

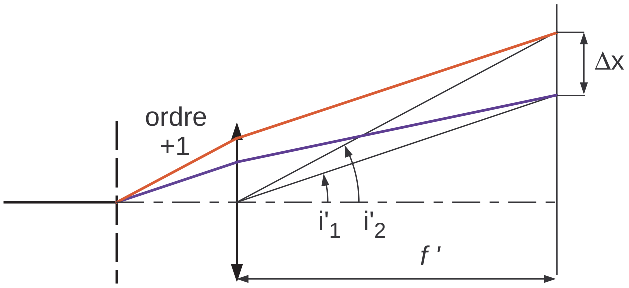
Calculons les angles de diffraction dans l'ordre + 1 pour les radiations extrêmes du spectre :

$5.\sin i'_1 = 1 \times 0,400 \quad \longrightarrow \quad i'_1 = 4,59^\circ$

$5.\sin i'_2 = 1 \times 0,750 \quad \longrightarrow \quad i'_2 = 8,63^\circ$

Dans le plan focal de la lentille, la largeur du spectre d'ordre + 1, et celui d'ordre – 1, par symétrie, est

$\Delta x = f'(\tan i'_2 - \tan i'_1) = 1000(\tan 8,63 - \tan 4,59) = 72,08 \simeq \mathbf{72\ mm}$



Remarques

1. Une <u>lunette de visée</u> est une lunette qui comprend un réticule, c'est-à dire une croisée de traits placée dans le plan d'une image intermédiaire réelle – traits qui se coupent sur l'axe optique. C'est ce qui permet d'amener un détail de l'objet au centre du champ, ou sur l'axe optique de la lunette, et donc d'effectuer une *visée*.

Pour les visées terrestres – ce que laisserait suggérer l'observation à 1000 m, classique quand on caractérise les jumelles – la lunette comprend en outre un système redresseur fait de prismes. On trouve également des redresseurs faits de lentilles dans les lunettes de visée pour les fusils.

Dans le cas présent, où réticule et redresseur n'existent pas, le terme seul de *lunette* aurait été plus approprié.

2. *Le terme <u>constringence</u> a disparu de la normalisation et a été remplacé par le <u>nombre d'Abbe</u>.*

*En effet, le document **NF ISO de Mars 1997 Verre d'optique brut / Vocabulaire** précise :*

> **nombre d'Abbe** : Expression mathématique pour déterminer la correction de l'aberration chromatique d'un matériau ou d'un composant optique, donnée comme suit :
>
> $$\nu_d = \frac{n_d - 1}{n_F - n_C}$$
>
> où
>
> n_d,n_F et n_C sont des indices de réfraction des longueurs d'onde de la raie d de l'hélium, de la raie F de l'hydrogène et de la raie C de l'hydrogène respectivement, ou bien comme suit :
>
> $$\nu_e = \frac{n_e - 1}{n_{F'} - n_{C'}}$$
>
> où
>
> n_e,$n_{F'}$ et $n_{C'}$ sont des indices de réfraction des longueurs d'onde de la raie e du mercure, de la raie F' du cadmium et de la raie C' du cadmium respectivement.